

Calculer la dérivée première de la fonction $y = \varphi(x)$ définie par l'équation $\sin(x-y) + \cos(x+y) = 1$. Conclure.

$$f(x, y) = \sin(x-y) + \cos(x+y) - 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\cos(x-y) + \sin(x+y)$$

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x-y) + \cos(x+y) = 1 \\ \sin(x-y) - \cos(x+y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x-y) = \frac{1}{2} \\ \cos(x-y) = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ impossible.}$$

Ainsi, en tout point (x_0, y_0) de la courbe d'équation $f(x, y) = 0$ la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ n'est pas nulle. D'après le Th. Fcts. Impl., il existera un voisinage ouvert U de x_0 , un voisinage ouvert V de y_0 et une application $\varphi: U \rightarrow V$ de classe C^∞ (car f l'est) telle que

$$\forall (x, y) \in U \times V \quad f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x)$$

La dérivée de φ sera (pour $x \in U$) :

$$\varphi'(x) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)} = - \frac{\cos(x-y) - \sin(x+y)}{-\cos(x-y) + \sin(x+y)} = 1$$

En intégrant : $\varphi(x) = x + k$ pour tout $x \in U$. En reportant dans l'équation, on trouve que nécessairement $k = 0$. Dnc :

Ccl :

$$\sin(x-y) + \cos(x+y) = 1 \Leftrightarrow y = x$$

Cette conclusion est un raccourci pour : "en fait que fonction de x
dérivable $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tq pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\sin(x - \varphi(x)) + \cos(x + \varphi(x)) = 1$.
C'est la fonction $\varphi: x \mapsto x$."

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ a) Montrer que $f(x, y) = 1$ définit une fonction implicite $x \mapsto \varphi(x)$ avec $\varphi(0) = 1$.
 b) Mq que φ est C^∞ et calculer $\varphi'(x)$ en fonction de x et de $y = \varphi(x)$.

a) Posons $g(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy - 1$

$$f(x, y) = 1 \Leftrightarrow g(x, y) = 0$$

~~et $g(0, 1) = 0$~~

On a : $g(0, 1) = 0$ et $\frac{\partial g}{\partial y}(0, 1) = +3 \neq 0$, d'où que

le th. des fonctions implicites montre l'existence :

- d'un voisinage U de 0 dans \mathbb{R}
- d'un voisinage V de 1 dans \mathbb{R}
- d'une fct $\varphi : U \rightarrow V$ telle que

$$\forall (x, y) \in U \times V \quad g(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x)$$

- b) g est C^∞ , donc φ le sera aussi sur un voisinage U de 0 dans \mathbb{R} .
 De plus, le Th. des Fct. Impl. donne :

$$\varphi'(x) = - \frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial g}{\partial y}(x, y)} \quad \text{avec } y = \varphi(x)$$

$$= - \frac{3x^2 - 3y}{3y^2 - 3x} = \frac{y - x^2}{y^2 - x}$$

Exercice n°1 :

On suppose que les fonctions $(x, y) \mapsto u(x, y)$ et $(x, y) \mapsto v(x, y)$ admettent des dérivées partielles et vérifient les relations

$$\begin{cases} u^2 - v^2 = x \\ 2uv = y \end{cases}$$

Calculer $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y)$, $\frac{\partial u}{\partial y}(x, y)$, $\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)$, $\frac{\partial v}{\partial y}(x, y)$.

$$1) \begin{cases} F_1(x, y, u, v) = x - u^2 + v^2 \\ F_2(x, y, u, v) = y - 2uv \end{cases}$$

Le Th. des fcts implicites mq u et v sont des fcts de (x, y) sur un voisinage de (x_0, y_0) tel que $F_1(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0$, ie qu'il existe f_1, f_2 de classe C^1 sur ce voisinage V , à valeurs dans \mathbb{R} , tq

$$\forall (x, y) \in V \quad \begin{cases} F_1(x, y, u, v) = 0 \\ F_2(x, y, u, v) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = f_1(x, y) \\ v = f_2(x, y) \end{cases}$$

En effet, les hyp. du Th. des fcts implicites s'écrivent :

$$\frac{D(F_1, F_2)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$2) \text{ Dérivons le système } \begin{cases} u^2 - v^2 = x \\ 2uv = y \end{cases} :$$

$$(1) \begin{cases} 2u \frac{\partial u}{\partial x} - 2v \frac{\partial v}{\partial x} = 1 \\ 2 \frac{\partial u}{\partial x} v + 2u \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 2u \frac{\partial u}{\partial y} - 2v \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ 2 \frac{\partial u}{\partial y} v + 2u \frac{\partial v}{\partial y} = 1 \end{cases}$$

(1) donne

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} 1/2 & -v \\ 0 & u \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u & -v \\ v & u \end{vmatrix}} = \frac{u}{2(u^2+v^2)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} u & 1/2 \\ v & 0 \end{vmatrix}}{u^2+v^2} = -\frac{v}{2(u^2+v^2)}$$

(2) donne :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -v \\ 1/2 & u \end{vmatrix}}{u^2+v^2} = \frac{-v}{2(u^2+v^2)} \\ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\begin{vmatrix} u & 0 \\ v & 1/2 \end{vmatrix}}{u^2+v^2} = \frac{u}{2(u^2+v^2)} \end{cases}$$

NB : Résolution directement.

$$\begin{cases} u^2 - v^2 = x \\ 2uv = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 - v^2 = x \\ u^2(-v^2) = -\frac{y^2}{4} \\ u \cdot v \cdot y \geq 0 \end{cases}$$

$$X^2 - xX - \frac{y^2}{4} = 0$$

$$\begin{cases} u^2 \\ -v^2 \end{cases} = \frac{x \pm \sqrt{x^2 + y^2}}{2}$$

d'où

$$\begin{cases} u^2 = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} + x}{2} \\ v^2 = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{2} \end{cases}$$

(~~check~~)

$$\begin{cases} u = \varepsilon \sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} + x}{2}} \\ v = \varepsilon (\text{sgn } y) \sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{2}} \end{cases}$$